# 1. FUNCIONES DEFINIDAS MEDIANTE INTEGRALES

## 1.1. Derivación bajo el signo integral

### Teorema (regla de Leibniz)

Sea $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, t)\, dt$$

donde $c, d \in \mathbb{R}$ son constantes. Si $f$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, t) : a \le x \le b, c \le t \le d\}$, entonces $\varphi$ es derivable en $(a, b)$ y

$$\varphi'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt \quad , \qquad a < x < b$$

**Observación:** La regla de Leibniz también es cierta cuando $a = -\infty$ y/o $b = \infty$, y cuando el intervalo es abierto en alguno de los extremos.

### Ejemplos

**1.** Halla la derivada de la función $\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} f(x, t)\, dt$, con $f(x, t) = \begin{cases} \frac{\sin xt}{t} & , \text{si } t \neq 0 \\ x & , \text{si } t = 0 \end{cases}$.

**2.** Usa la regla de Leibniz para hallar el valor de la integral $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

### Teorema (regla generalizada de Leibniz)

Supongamos que $f$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, t) : a \le x \le b, c \le t \le d\}$, que $u_1, u_2 : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ son funciones derivables con continuidad, y que

$$\varphi(x) = \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x, t)\, dt \quad , \qquad a \le x \le b$$

Entonces, $\varphi$ es derivable en $(a, b)$ y

$$\varphi'(x) = f\left(x, u_2(x)\right) u_2'(x) - f\left(x, u_1(x)\right) u_1'(x) + \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt \quad , \qquad a < x < b$$

**Observación:** Como antes, la regla generalizada de Leibniz también es cierta cuando $a = -\infty$ y/o $b = \infty$, y cuando el intervalo es abierto en alguno de los extremos.

### Ejemplo

Calcula, donde exista, la derivada de la función: $\varphi(x) = \int_0^{x^2} \arctan \frac{t}{x^2}\, dt$.

### Ejercicios

**1.** Halla las derivadas de las siguientes funciones definidas por integrales, indicando su dominio.

**(a)** $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-t}}{xt + 1}\, dt$

**(b)** $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \cos t^2\, dt$

**(c)** $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\sin x}^{x} \ln(1 + xt)\, dt\ ,\ \ 0 \le x \le \pi$

**2.** Halla, usando la regla de Leibniz, las siguientes integrales:

**(a)** $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\, dt\ ,\ x \ge 0$ **(b)** $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(t^2 + x^2)^2}$ , si $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{4x} \ \ (x \neq 0)$

**3.** Calcula $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\log x} dx$, a partir $I(x) = \int_0^1 \frac{t^x-1}{\log t} dt$.

## Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

**1.** **(a)** $\varphi'(x) = \int_1^2 \frac{-te^{-t}}{(xt+1)^2}\,dt$; **(b)** $\varphi'(x) = 2x\cos x^4$;
**(c)** $\varphi'(x) = 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\ln(1+x^2) + \left(\frac{1}{x^2} - \cos x\right)\ln(1 + x\operatorname{sen} x)$, $0 < x < \pi$.
**2.** **(a)** $I(x) = \ln(x+1)$; (b) $I(x) = \frac{\pi+2}{8x^3}$.
**3.** $I = \log 2$.